2. LINIJSKI INTEGRAL PRVE VRSTE

PREGLED TEORIJE

2.1. Neka je $\widehat{AB}$ luk krive koja se može rektificirati, tj. neka za svaku tačku $T \in \widehat{AB}$ postoji

$$s = \text{duž}\,(\widehat{AT}). \tag{1}$$

Tada za svake dvije tačke $T_1, T_2 \in \widehat{AB}$ postoji

$$\text{duž}\,(\widehat{T_1 T_2}) = |s_1 - s_2|, \tag{2}$$

gdje je

$$s_i = \text{duž}\,(\widehat{AT_i}) \quad (i = 1, 2). \tag{3}$$

Osim toga jednačina luka $\widehat{AB}$ može se napisati u obliku

$$\vec{r} = \vec{r}\,(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant s_B). \tag{4}$$

Luk $\widehat{AB}$ se može rektificirati sigurno ako je to luk po dijelovima glatke krive

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{5}$$

2.2. Neka je $\widehat{AB}$ luk neke krive koja se može rektificirati i neka je duž tog luka zadana funkcija

$$f = f(T) = f(x, y, z) \quad (T(x, y, z) \in \widehat{AB}). \tag{6}$$

Podijelimo luk $\widehat{AB}$ diobenim tačkama $A = T_0, T_1, \ldots, T_n = B$ na komade $\widehat{T_{i-1} T_i}$ koji imaju dužine luka

$$\Delta s_i = |s_i - s_{i-1}| = \text{duž}\,(\widehat{T_{i-1} T_i}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Na svakom komadu $\widehat{T_{i-1} T_i}$ odaberimo neku tačku T_i^* i formirajmo (integralnu) sumu

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(T_i^*) \cdot \Delta s_i. \tag{8}$$

Kaže se da je funkcija (6) integrabilna duž luka $\widehat{AB}$, tj. da postoji

$$I = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sigma_n \tag{9}$$

ukoliko postoji realan broj I takav da se za svako $\varepsilon > 0$ može naći $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sa osobinom

$$\max \Delta s_i < \delta \Rightarrow |I - \sigma_n| < \varepsilon \tag{10}$$

nezavisno od toga o kojoj je podjeli riječ i kako je izvršen izbor tačaka T_i^*.

U tom slučaju se piše

$$I = \int_{\widehat{AB}} f(T)\, ds = \int_{\widehat{AB}} f(x, y, z)\, ds \tag{11}$$

i taj izraz zove se linijski integral prve vrste funkcije (6) po luku $\widehat{AB}$.

2.3. Ako je funkcija (6) po dijelovima neprekidna, a $\widehat{AB}$ luk po dijelovima glatke krive (4), odnosno (5), tada integral (11) postoji i svodi se na određeni integral

$$I = \int_{\widehat{AB}} f(T)\, ds = \int_0^{s_B} f(x(s), y(s), z(s))\, ds, \tag{12}$$

odnosno

$$I = \int_{\widehat{AB}} f(T)\, \mathrm{ds} = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt. \tag{13}$$

Ako je funkcija (6) konstantna duž luka $\widehat{AB}$, tada je

$$I = \int_{\widehat{AB}} k ds = k.\ \text{duž}\,(\widehat{AB}). \tag{14}$$

2.4. Integralna suma (8) ne zavisi od orijentacije luka, tj. ona je ista za $\widehat{AB}$ i za $\widehat{BA}$, ukoliko je u pitanju ista podjela i isti izbor tačaka T_i^*. Zato je za svaku funkciju (6) integrabilnu duž $\widehat{AB}$

$$\int_{\widehat{AB}} f(T)\, ds = \int_{\widehat{BA}} f(T)\, ds. \tag{15}$$

Osim toga za svaku tačku $C \in \widehat{AB}$ i za svaku funkciju (6) integrabilnu duž $\widehat{AB}$ vrijedi

$$\int_{\widehat{AB}} f(T)\, ds = \int_{\widehat{AC}} f(T)\, ds + \int_{\widehat{CB}} f(T)\, ds. \tag{16}$$

2.5. Za funkcije $f(T)$ i $g(T)$ integrabilne duž $\widehat{AB}$ vrijedi

$$\int_{\widehat{AB}} (f(T) \pm g(T))\, ds = \int_{\widehat{AB}} f(T)\, ds \pm \int_{\widehat{AB}} g(T)\, ds, \tag{17}$$

$$\int_{\widehat{AB}} k \cdot f(T)\, ds = k \cdot \int_{\widehat{AB}} f(T)\, ds, \tag{18}$$

$$f(T) \leqslant g(T) \quad (\forall T \in \widehat{AB}) \Rightarrow \int_{\widehat{AB}} f(T)\, ds \leqslant \int_{\widehat{AB}} g(T)\, ds. \tag{19}$$

Specijalno, iz

$$-|f(T)| \leqslant f(T) \leqslant |f(T)| \quad (\forall T \in \widehat{AB})$$

slijedi

$$\left| \int_{\widehat{AB}} f(T)\, ds \right| \leqslant \int_{\widehat{AB}} |f(T)|\, ds, \tag{20}$$

dok iz

$$m \leqslant f(T) \leqslant M \quad (\forall T \in AB)$$

slijedi

$$m \cdot \text{duž}\,(AB) \leqslant \int_{AB} f(T)\, ds \leqslant M \cdot \text{duž}\,(AB). \tag{21}$$

Zbog (21) postoji broj α između m i M za koji vrijedi

$$\int_{\widehat{AB}} f(T)\, ds = \alpha \cdot \text{duž}\,(\widehat{AB}). \tag{22}$$

Broj α iz (22) predstavlja srednju vrijednost funkcije $f(T)$ na luku $\widehat{AB}$. Ako je $f(T)$ neprekidna funkcija, tada je $\alpha = f(T_0)$ za neko $T_0 \in \widehat{AB}$.

2.6. Ako je S dio cilindrične površi

$$F(x, y) = 0$$

između Oxy-ravni i neke površi

$$z = z(x, y),$$

tada se površina $p(S)$ površi S računa po formuli

$$p(S) = \int_C z(x, y)\, ds, \tag{23}$$

pri čemu je

$$C : F(x, y) = 0, \; z = 0$$

direktrisa date cilindrične površi.

2.7. Ako je na nekoj krivoj C raspoređena masa tako da je linearna gustoća mase

$$\rho = \rho(x, y, z), \tag{24}$$

tada je ukupna masa krive

$$m = \int_C \rho(x, y, z)\, ds, \tag{25}$$

dok težište T krive C ima koordinate:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{m} \cdot \int_C x \cdot \rho(x, y, z)\, ds, \\ y_T &= \frac{1}{m} \cdot \int_C y \cdot \rho(x, y, z)\, ds, \\ z_T &= \frac{1}{m} \cdot \int_C z \cdot \rho(x, y, z)\, ds. \end{aligned} \tag{26}$$

2.8. Kriva C duž koje je raspoređena masa sa linearnom gustoćom (24) privlači materijalnu tačku $T_0(x_0, y_0, z_0)$ u kojoj je skoncentrisana masa m_0 silom

$$\vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k}, \tag{27}$$

čije su komponente date izrazima:

$$\begin{aligned} F_1 &= K m_0 \int_C \frac{(x - x_0)\, \rho(x, y, z)}{r^3}\, ds, \\ F_2 &= K m_0 \int_C \frac{(y - y_0)\, \rho(x, y, z)}{r^3}\, ds, \\ F_3 &= K m_0 \int_C \frac{(z - z_0)\, \rho(x, y, z)}{r^3}\, ds, \end{aligned} \tag{28}$$

pri čemu je K gravitaciona konstanta, a $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

2.9. Kriva C na kojoj je raspoređena masa gustoće (24) ima moment inercije u odnosu na neku osu, odnosno neku ravan dat izrazom

$$M = \int_C d^2(x, y, z) \cdot \rho(x, y, z)\, ds,$$

pri čemu je $d(x, y, z)$ udaljenost tačke $T(x, y, z) \in C$ od te ose, odnosno od te ravni.

Specijalno, za z-osu, odnosno za Oxy-ravan imamo moment inercije

$$M_z = \int_C (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z)\, ds, \tag{29'}$$

odnosno

$$M_{xy} = \int_C z^2 \cdot \rho(x, y, z)\, ds. \tag{29''}$$

2.10. Linijski integral prve vrste definiše se analogno i za vektorsku funkciju

$$\vec{F} = \vec{F}(T) = \vec{F}(x, y, z) = \vec{F}_1(T)\,\vec{i} + F_2(T)\,\vec{j} + F_3(T)\,\vec{k}. \tag{30}$$

Za taj integral imamo odgovarajuću oznaku

$$\vec{I} = \int_C \vec{F}(T)\, ds = \int_C \vec{F}(x, y, z)\, ds. \tag{31}$$

Pokazuje se da integral (31) postoji ako i samo ako postoje integrali

$$I_l = \int_C F_l(T)\, ds = \int_C F_l(x, y, z)\, ds \quad (l = 1, 2, 3) \tag{32}$$

i da je tada

$$\vec{I} = I_1\vec{i} + I_2\vec{j} + I_3\vec{k}. \tag{33}$$

2.11. Linijski integral vektorske funkcije ima osobine analogne osobinama (15) — (18), ali i osobine

$$\vec{a} \cdot \int_C \vec{F}(T)\, ds = \int_C \vec{a} \cdot \vec{F}(T)\, ds, \tag{34}$$

$$\vec{a} \times \int_C \vec{F}(T)\, ds = \int_C \vec{a} \times \vec{F}(T)\, ds, \tag{35}$$

gdje je $\vec{a}$ proizvoljan konstantan vektor.

2.12. Ako stavimo

$$\vec{r} = (x - x_0)\,\vec{i} + (y - y_0)\,\vec{j} + (z - z_0)\,\vec{k}, \tag{36}$$

tada relacije (27) i (28) možemo napisati u obliku

$$\vec{F} = Km_0 \int_C \rho(x, y, z) \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\, ds. \tag{37}$$

ZADACI

Izračunati sljedeće krivolinijske integrale I vrste.

41. $\int\limits_C xy\,ds$, ako je C dio elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$ koji leži u I kvadrantu.

42. $\int\limits_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\,ds$, ako je C astroida $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$.

43. $\int\limits_C \frac{ds}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, gdje je C luk hiperbolne spirale $\rho\varphi=1\ (\sqrt{3}\leqslant\varphi\leqslant 2\sqrt{2})$.

44. $\int\limits_C (x^2+y^2+z^2)\,ds$, gdje je C zavojnica

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

45. $\int\limits_C (2z-\sqrt{x^2+y^2})\,ds$, gdje je $C: x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t$

$$(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

46. $\int\limits_C x\sqrt{x^2-y^2}\,ds$, gdje je C lemniskata $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ (x\geqslant 0)$.

47. $\int\limits_C (x-y+2z)\,ds$, gdje je C kontura trougla $A(0,0,0)\,B(14,0,0)$

$$C\left(9,\frac{36}{5},\frac{48}{5}\right).$$

Rješenja:

41. Kako je $C: y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant a)$, imamo

$$I=\int\limits_C xy\,ds=\int\limits_C xy\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int\limits_0^a x\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,dx,$$

tj.

$$I=\frac{b}{a^2}\int_0^a x\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,dx=\frac{-b}{3a^2(a^2-b^2)}\cdot[a^4-(a^2-b^2)x^2]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=$$

$$=\frac{a^3b(a^3-b^3)}{3a^2(a^2-b^2)}=\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.$$

Zadatak se može riješiti i na drugi način. Kriva se može predstaviti parametarski: $x=a\cos t,\ y=b\sin t\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, pa je

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt,$$

dakle,

$$I=\int_c xy\,ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt.$$

Nakon smjene

$$u^2=a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t,\ \ u\,du=(a^2-b^2)\sin t\cos t\,dt$$

dobija se

$$I=\frac{ab}{a^2-b^2}\int_b^a u^2\,du=\frac{ab}{3(a^2-b^2)}(a^3-b^3)=\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.$$

42. $I=4a\frac{7}{3}$.

43. U polarnim koordinatama biće

$$ds=\sqrt{\rho^2+\rho_\varphi'^2}\,d\varphi=\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}+\frac{1}{\varphi^4}}\,d\varphi,$$

pa je

$$I=\int_c\frac{ds}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\int_c\frac{ds}{(\rho^2)^{\frac{3}{2}}}=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\varphi\cdot\frac{\sqrt{\varphi^2+1}}{2}\,d\varphi=$$

$$=\frac{(\varphi^2+1)^{\frac{3}{2}}}{6}\Bigg|_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}=\frac{19}{6}.$$

44. Biće

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,dt,$$

$$I=\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2\,2\pi+b^2\frac{8\pi^3}{3}\right).$$

45. $I=\frac{2\sqrt{2}}{3}[(1+2\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1]$.

46. $I=\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

47. $I=\int\limits_{\overline{AB}}+\int\limits_{\overline{BC}}+\int\limits_{\overline{CA}}$.

$$\int\limits_{\overline{AB}}(x-y+2z)\,ds=\int_0^{14}x\,dx=\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{14}=\frac{196}{2}=98,$$

jer $\overline{AB}: x=x,\ y=0,\ z=0,\ ds=dx$.

$$\int\limits_{\overline{BC}}(x-y+2z)\,dx=\int_0^1\left(-5t+14-\frac{36}{5}t+\frac{96}{5}t\right)13\,dt=\frac{35}{2},$$

zbog $\overline{BC}: \frac{x-14}{-5}=\frac{y}{\frac{36}{5}}=\frac{z}{\frac{48}{5}}=t$, tj. $x=-5t+14,\ y=\frac{36}{5}t,\ z=\frac{48}{5}t,$

$$ds=\sqrt{5^2+\left(\frac{36}{5}\right)^2+\left(\frac{48}{5}\right)^2}\,dt=13\,dt.$$

$$\int\limits_{\overline{CA}}(x-y+2z)\,ds=\int_0^1\left(9t-\frac{36}{5}t+\frac{96}{5}\right)t=-\frac{7}{2},$$

zato što je $\overline{CA}: \frac{x}{9}=\frac{y}{\frac{36}{5}}=\frac{z}{\frac{48}{5}}=t$.

Prema tome $I=98+\frac{35}{2}-\frac{7}{2}=112$.

Izračunati površinu površi S ako je:

48. S dio cilindra $x^2+y^2=R^2$ između površi $z=0$ i $z=R+\frac{x^2}{R}$.

49. S površ tijela koje ograničavaju cilindri $x^2+y^2=R^2$ i $z^2+x^2=R^2$.

50. S dio cilindra $x^2+y^2=Rx$ unutar sfere $x^2+y^2+z^2=R^2$.

51. S dio cilindra $x^2+y^2=ay$ ograničen površima $z=0$ i $z=x^2+y^2$.

52. S dio cilindra $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ ograničen površima $z=y$ i $z=0$.

Rješenja:

48. Tražena površina biće

$$P=\int_C z\,ds=\int_C\left(R+\frac{x^2}{R}\right)ds,$$

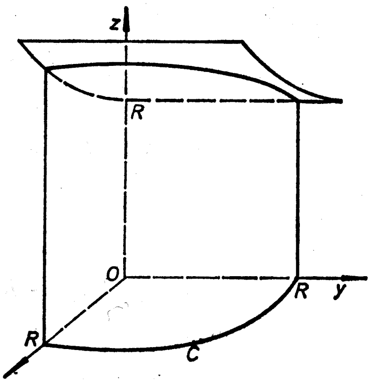
gdje je C: $x^2+y^2=R^2$, $z=0$ (sl. 4). Napišimo krivu C u parametarskom obliku:

$$x=R\cos t,\ y=R\sin t\,(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

Tada je

$$P=\int_0^{2\pi}(R+R\cos^2 t)\,R\,dt, \text{ tj.}$$

$$P=R^2\left(2\pi+\pi+\frac{\sin 4\pi}{4}\right)=3R^2\pi.$$



Sl. 4

49. $P=16\int_C z\,ds=16\int_C\sqrt{R^2-x^2}\,ds$, pri čemu je (sl. 5)

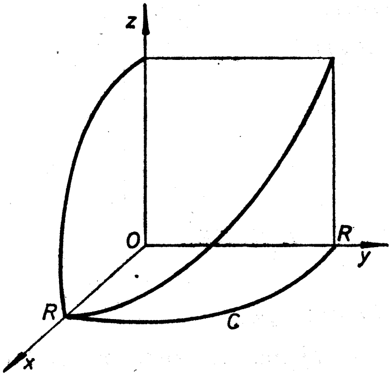
$$C\colon x^2+y^2=R^2\,(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0),\ z=0.$$

Zato je

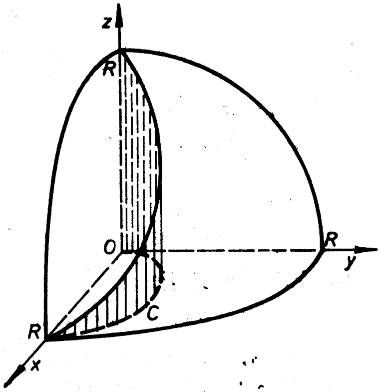
$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx,$$

$$P=16\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx, \text{ tj.}$$

$$P=16R^2.$$



Sl. 5



Sl. 6

50. $P=4\int_C\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\,ds$, gdje je C: $x^2+y^2=Rx$, $(x\geqslant 0,\ \ y\geqslant 0)$, $z=0$. (sl. 6).

Izrazimo krivu C u polarnim koordinatama:

$$\rho^2 = R\rho\cos\varphi, \quad \text{tj.} \quad \rho = R\cos\varphi \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Prema tome,

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\, d\varphi = R\, d\varphi,$$

$$P = 4\int_C \sqrt{R^2 - \rho^2}\, ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2\cos^2\varphi}\, R d\varphi,$$

dakle,

$$P = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi = 4R^2.$$

51. $P = 2a^2$.

52. $P = 2a^2(2-\sqrt{2})$.

Odrediti masu luka l ako je:

53. l luk elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ koji leži u prvom kvadrantu, a linijska gustoća mase u svakoj tački jednaka ordinati te tačke.

54. l luk krive: $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$ od tačke $O(0, 0, 0)$ do tačke $A(a, a, a\sqrt{2})$, a linijska gustoća mase u svakoj tački jednaka aplikati te tačke.

55. l luk krive $x = t$, $y = \frac{1}{2}t^2$, $z = \frac{t^3}{3}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, a linijska gustoća mase $\rho = \sqrt{2y}$.

Naći težište homogenog luka l:

56. Cikloide

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

kad je

1) $0 \leqslant t \leqslant \pi$

2) $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

57. Krive

$$x = e^t\cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t \ (-\infty \leqslant t \leqslant 0).$$

58. Zavojne linije

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt \ (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

Odrediti silu kojom masa M ravnomjerno raspoređena na luku l privlači materijalnu tačku mase m smještenu u koordinatnom početku, ako je:

59. l luk krive

$$x = e^t\cos t, \quad y = e^t\sin t, \quad z = e^t \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

60. l luk kružnice $\rho = R$, $0 < \varphi < \alpha$ $(\alpha < 2\pi)$.

Rješenja:

53. Imamo

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \; y'=-\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

tj.

$$ds=\frac{b\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{a^2 y}\,dx,$$

pa je

$$M=\int_C y\,ds=\frac{b}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,dx.$$

Kako je

$$\int \sqrt{k^2\pm u^2}\,du=\frac{1}{2}u\sqrt{k^2\pm u^2}+\frac{k^2}{2}\int\frac{du}{\sqrt{k^2\pm u^2}},$$

dobijamo:

1) Za $a^2>b^2$

$$M=\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{a^4}{a^2-b^2}-x^2}+\frac{a^4}{2(a^2-b^2)}\arcsin\frac{x}{\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}}\right]_0^a$$

$$M=\frac{b^2}{2}+\frac{a^2 b}{2\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a};$$

2) Za $a^2<b^2$

$$M=\frac{b\sqrt{b^2-a^2}}{a^2}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{a^4}{b^2-a^2}+x^2}+\frac{a^4}{2(b^2-a^2)}\ln\left(x+\sqrt{\frac{a^4}{b^2-a^2}+x^2}\right)\right]_0^a$$

$$M=\frac{b^2}{2}+\frac{a^2 b}{2\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}.$$

54. $M=\dfrac{a^2}{256\sqrt{2}}\left(100\sqrt{38}-72-17\ln\dfrac{25+4\sqrt{38}}{17}\right).$

55. $$M=\int_C\sqrt{2y}\,ds=\int_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(t^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(t^2+\frac{1}{2}\right)\sqrt{t^4+t^2+1}+\frac{3}{8}\ln\left(t^2+\frac{1}{2}+\sqrt{t^4+t^2+1}\right)\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{8}\left(3\sqrt{3}-1+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right).$$

56. Koordinate težišta homogene ravninske krive C date su izrazima:

$$x_T = \frac{\int\limits_C x\,ds}{\int\limits_C ds}, \qquad y_T = \frac{\int\limits_C y\,ds}{\int\limits_C ds}.$$

U ovom slučaju je

$$x = a(t - \sin t), \;\; y = a(1 - \cos t),$$

$$\dot{x} = a(1 - \cos t), \;\; \dot{y} = a \sin t, \quad \text{dakle,} \;\; ds = 2a \sin\frac{t}{2}.$$

Zato imamo:

a) $$\int\limits_C ds = \int\limits_0^\pi 2a \sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^\pi = 4a;$$

$$\int\limits_C x\,ds = \int\limits_0^\pi a(t - \sin t)\cdot 2a \sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 2a^2\left(-2t\cos\frac{t}{2} + 4\sin\frac{t}{2} - \frac{4}{3}\cdot\sin^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{16a^2}{3};$$

$$\int\limits_C y\,ds = \int\limits_0^\pi a(1 - \cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 4a^2\int\limits_0^\pi \sin^3\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 4a^2\left(-2\cos\frac{t}{2} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{16a^2}{3};$$

dakle,

$$x_T = \frac{4a}{3}; \;\; y_T = \frac{4a}{3}.$$

b) $$\int\limits_C ds = 8a; \;\; \int\limits_C x\,ds = 8a^2\pi; \;\; \int\limits_C y\,ds = \frac{32a^2}{3};$$

dakle,

$$x_T = a\pi; \;\; y_T = \frac{4a}{3}.$$

57. Sad je

$$x = e^t\cos t, \; y = e^t \sin t, \;\; z = e^t \; (-\infty \leqslant t \leqslant 0),$$

dakle

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt = e^t\sqrt{3}\,dt.$$

Zato je

$$\int_C ds = \int_{-\infty}^{0} e^t \sqrt{3}\, dt = \sqrt{3}\, e^t \Big|_{-\infty}^{0} = \sqrt{3}\,;$$

$$\int_C x\,ds = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} \sqrt{3} \cos t\, dt = \sqrt{3}\, e^{2t} \left(\frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \sin t\right) \Bigg|_{-\infty}^{0} = \frac{2}{5} \sqrt{3}\,;$$

$$\int_C y\,ds = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} \sqrt{3} \sin t\, dt = \sqrt{3} e^{2t} \left(-\frac{1}{5} \cos t + \frac{2}{5} \sin t\right) \Bigg|_{-\infty}^{0} = -\frac{\sqrt{3}}{5}\,;$$

$$\int_C z\,ds = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} \sqrt{3}\, dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Prema tome,

$$x_T = \frac{2}{5}\,; \quad y_T = -\frac{1}{5}\,; \quad z_T = \frac{1}{2}\,.$$

58. $x_T = 0$; $y_T = \dfrac{2a}{\pi}$; $z_T = \dfrac{b\pi}{2}$.

59. Privlačna sila

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \text{ ima komponente:}$$

$$F_x = K \cdot m \int_C \frac{x\, \rho\, ds}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}\,, \quad F_y = K \cdot m \int_C \frac{y\, \rho\, ds}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}\,,$$

$$F_z = K \cdot m \int_C \frac{z\, \rho\, ds}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}\,, \text{ gdje je } K \text{ konstanta gravitacije.}$$

U ovom slučaju

$$\rho = \frac{M}{l}\,, \text{ pri čemu je}$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt = \int_0^{2\pi} e^t \sqrt{3}\, dt = \sqrt{3}\,(e^{2\pi} - 1),$$

dužina luka date krive C. Zato je

$$F_x = \frac{KMm}{l} \int_0^{2\pi} \frac{e^t \cos t \cdot e^t \sqrt{3}\, dt}{(e^t \sqrt{2})^3} = \frac{KM}{l} \frac{m\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} e^{-t} \cos t\, dt =$$

$$= \frac{KMm\sqrt{3}}{l \cdot 2\sqrt{2}}\, e^{-t} \left(-\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t\right) \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{KM\, m\sqrt{3}}{l \cdot 2\sqrt{2}} \left(e^{-2\pi} \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\right),$$

tj.

$$F_x = \frac{-KMm}{4\sqrt{2}} e^{-2\pi}.$$

Slično se dobije

$$F_y = \frac{-KMm}{4\sqrt{2}} e^{-2\pi}; \qquad F_z = \frac{KMm}{2\sqrt{2}} e^{-2\pi}.$$

Intenzitet privlačne sile je

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \frac{KMm}{2\sqrt{2}} e^{-2\pi} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{KMm\sqrt{3}}{4} e^{-2\pi}.$$

60. $\vec{F} = \frac{Mm}{R\alpha} (\sin\alpha\, \vec{i} + (1 - \cos\alpha)\, \vec{j}).$